

## О столкновениях и законах сохранения в механике.

### Введение.

Законы сохранения в механике твердых тел представляются, как самодостаточные фактически постулируемые законы природы, позволяющие успешно решать многие теоретические и практические задачи. Однако решение даже многочисленных частных задач еще не является обоснованием абсолютной справедливости этих постулатов и не определяет области их правомерности.

Ниже предлагается альтернативный метод решения задач столкновений в механике, опирающийся только на эмпирические законы Ньютона и Гука. Этот метод позволяет решать более широкий круг задач по сравнению с законами сохранения.

Существование различных инвариантов в замкнутых системах, в том числе, комбинаций физических величин, называемые импульсом и кинетической энергией, является следствием предлагаемых ниже решений на основании эмпирических законов. С одной стороны, это обосновывает законы сохранения, с другой стороны, демонстрирует их избыточность и вторичность.

### Столкновения шаров.

Рассмотрим чисто лобовое столкновение твердых шаров. Два шара массой  $m_1$  и  $m_2$ , имея встречные поступательные скорости с величинами  $v_1$  и  $v_2$  соответственно, сталкиваются, как это изображено на рис.1:

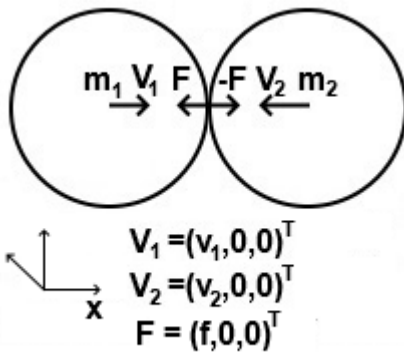


Рис. 1. Столкновение шаров

Требуется определить скорости твердых шаров после столкновения.

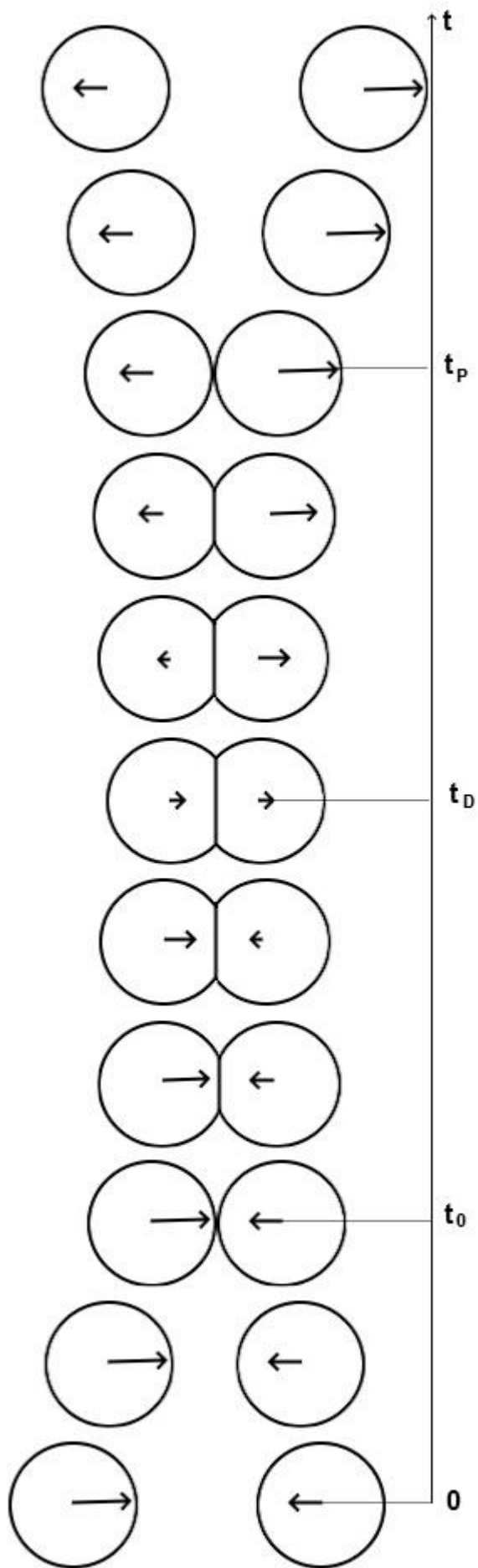
При классическом решении этой задачи столкновение твердых шаров отождествляется с мгновенным столкновением материальных точек с соответствующими массами и скоростями. При использовании законов сохранения импульса и кинетической энергии задача легко решается.

Использование законов сохранения позволяет получить правильный конечный результат для многих задач механики твердых тел, но далеко не для всех.

Если принять более реалистичную модель шаров, то и решение окажется более реалистичным и более общим - без принятия шаров точками, столкновения мгновенным и без постулирования законов сохранения.

### Модель столкновения условно твердых шаров.

Физические шары не могут быть абсолютно твердыми, они могут быть сколь угодно твердыми, но упруго деформируются при столкновении. Тогда столкновение представляется не мгновенным актом, а процессом со сколь угодно малой, но конечной продолжительностью. Раскадровка такого процесса схематично показана на рис.2:



**Рис. 2.** Столкновение шаров

Столкновение можно условно разделить на два этапа –сжатия и восстановления формы шаров.

На первом этапе от момента  $t_0$  начала столкновения до середины  $t_b$  этого процесса шары деформируются, а скорости их центров масс выравниваются. В момент  $t_b$  равенства скоростей степень сжатия шаров максимальная, и возникающие в них упругие силы достигают максимальных значений.

На втором этапе с момента  $t_b$  равенства скоростей шаров и до момента  $t_p$  их разделения происходит обработка полученной шарами деформации.

Обработка или разгрузка деформаций происходит непрерывно и до момента  $t_b$ , причем со скоростью, несоизмеримо более высокой, чем разница скоростей шаров, вызывающей деформацию. До момента  $t_b$  деформация распространяется из области контакта по объемам шаров и происходит подобие сжатия их внутренних пружин.

С момента  $t_b$  ситуация меняется. Скорости шаров сравнялись, и нет причин для воздействий друг на друга, но их внутренние пружины сжаты и начинают разжиматься. Разжимаясь после момента  $t_b$  шары отталкиваются друг от друга и разлетаются в момент  $t_p$ .

Все время взаимодействия шаров по 3-му закону Ньютона они действуют друг на друга с противоположно направленными равными по величине силами. Интегралы этих сил в любой момент  $t$  также равны по величине и имеют разные знаки.

Тогда по 2-му закону Ньютона интегралы величин  $m\mathbf{v}_1'$ ,  $m\mathbf{v}_2'$  в любой момент  $t$  процесса столкновения также равны по величине и имеют разные знаки:

$$\int_{t_0}^t m_1 \mathbf{v}_1'(\tau) d\tau = - \int_{t_0}^t m_2 \mathbf{v}_2'(\tau) d\tau$$

Взяв интегралы и перегруппировав полученные слагаемые левой и правой частей, получаем соотношение для любого момента  $t$  процесса столкновения:

$$(1) \quad m_1 \mathbf{v}_1(t_0) + m_2 \mathbf{v}_2(t_0) = m_1 \mathbf{v}_1(t) + m_2 \mathbf{v}_2(t)$$

Равенство (1) - формулировка закона сохранения импульса в замкнутой системе материальных точек или тел, которые не вращаются. Это равенство, а значит и упомянутый закон, являются следствиями законов Ньютона.

Заметим, что такой простой и давно известный вывод закона сохранения импульса справедлив при столкновении, длящимся конечное время при конечных интегрируемых силах и ускорениях, но не при абстрактных мгновенных взаимодействиях абсолютно твердых тел. Более того, соотношение (1) – уравнение с двумя неизвестными, что недостаточно для решения задачи. Общепринято дополнять это уравнение еще одним - постулируемым законом сохранения кинетической энергии, но при этом могут быть утеряны важные обстоятельства, которые обсуждаются ниже.

### Гипотеза о подобии процессов упругих столкновений.

Изложенная выше гипотеза о микропроцессах, происходящих с запредельно высокой скоростью при столкновении условно твердых шаров, предположительно имеет наблюдаемое подобие в макромире.

Рассмотрим столкновение груза с пружиной, как это представлено на рис.3:

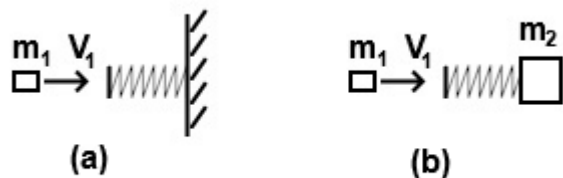


Рис. 3. Упругие столкновения

На рис. 3(а) груз массы  $m_1$ , имея скорость  $v_1$ , сталкивается в момент  $t_0$  с пружиной, закрепленной на неподвижном основании. Достаточно жесткая пружина, сжимаясь, остановит груз, а затем отбросит в обратном направлении с той же по величине скоростью. Это решение легко получить, применив закон Гука.

Если основание подвижно и имеет массу  $m_2$ , как показано на рис. 3(б), то в процессе торможения груза, основание, очевидно, будет разгоняться. Неизбежно наступит момент  $t_b$ , когда скорости груза ( $v_1$ ) и основания ( $v_2$ ) сравняются:

$$\mathbf{v}_1(t_b) = \mathbf{v}_2(t_b)$$

В соответствии с равенством (1) при этом удовлетворяется условие:

$$(2) \quad m_1(v_1(t_0) - v_1(t_D)) = m_2v_2(t_D),$$

Приращение импульса груза в момент  $t_D$  будет равно приращению импульса основания с противоположным знаком – импульс груза уменьшится на величину  $m_2v_2(t_D)$ , а пружина окажется максимально сжатой. В нее "будет заряжен" импульс, равный интегралу от силы  $f$ , которая действовала со стороны груза во время его торможения, плюс интегралу от силы, которая одновременно действовала со стороны основания в противоположном направлении. Интегралы этих сил, очевидно, равны изменениям импульсов груза и основания, они равны по величине и противоположно направлены.

После момента  $t_D$  пружина будет "разряжаться", расталкивая груз и основание в противоположные стороны. При этом груз и основание еще раз обменяются импульсами. По закону Гука процесс разжимания пружины будет зеркально отображать процесс ее сжатия, как это иллюстрируется на рис.4:

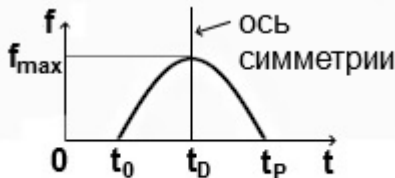


Рис. 4. Симметрия силы

Здесь изображен условный график величины силы  $f$ , с которой пружина действует на груз. Такая же, по величине сила действует на основание в противоположном направлении. Для дальнейших построений форма графика значения не имеет. Имеет значение только его симметрия - равенство интегралов этой функции на интервалах сжатия  $(t_0, t_D)$  и разжимания  $(t_D, t_P)$  пружины:

$$\int_{t_0}^{t_D} f(\tau) d\tau = \int_{t_D}^{t_P} f(\tau) d\tau$$

При равенстве указанных интегралов импульс груза повторно получит приращение, равное  $-m_2v_2(t_D)$ , тогда импульс груза в момент  $t_P$  будет вычисляться по формуле:

$$(3) \quad m_1v_1(t_P) = m_1v_1(t_0) - 2m_2v_2(t_D)$$

Аналогичным образом импульс основания удваивается в момент  $t_P$  по отношению к импульсу имевшемуся в момент  $t_D$ :

$$(4) \quad m_2v_2(t_P) = 2m_2v_2(t_D)$$

Система уравнений (2)-(4) является системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными:  $v_2(t_D)$ ,  $v_1(t_P)$ ,  $v_2(t_P)$ . Искомое решение этой системы для величин  $v_1(t_P)$ ,  $v_2(t_P)$  имеет вид:

$$(5) \quad v_1(t_P) = v_1(t_0) \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$(6) \quad v_2(t_P) = 2v_1(t_0) \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}$$

### Общий вид решения.

Возвращаясь к исходной задаче столкновения шаров, замечаем, что она фактически решена в предположении подобия процессов столкновения твердых шаров и упругих столкновений, наблюдаемых в макромире. Для получения решения задачи с шарами достаточно сделать следующие переобозначения.

Первый шар играет роль груза, а второй – основания. При решении задачи начальная скорость основания считалась нулевой, но это не ограничивает общности решения.

Если второй шар имеет начальную скорость  $v_2(t_0)$ , то из симметрии следует, что в процессе столкновения она перераспределится подобно скорости первого шара. Для учета начальной скорости второго шара в формулах (5), (6) следует поменять местами индексы "2" и "1".

Обе перераспределенные начальные скорости будут суммироваться по завершению столкновения. Тогда, пропуская простые промежуточные выкладки, можно выписать окончательный результат:

$$(7) \quad v_1(t_P) = \frac{(m_1 - m_2)v_1(t_0) + 2m_2v_2(t_0)}{(m_1 + m_2)}$$

$$(8) \quad v_2(t_P) = \frac{(m_2 - m_1)v_2(t_0) + 2m_1v_1(t_0)}{(m_1 + m_2)}$$

Формулы (7), (8) являются общим решением задачи о лобовом столкновении условно твердых шаров.

### Вывод закона сохранения кинетической энергии.

Заметим, что законы сохранения импульса и кинетической энергии не потребовались при получении общего решения (7), (8), оказалось достаточно эмпирических законов Гука и Ньютона.

Более того, если обе части равенства (7) возвести в квадрат и умножить на величину  $m_1$ , обе части равенства (8) возвести в квадрат и умножить на величину  $m_2$  и сложить почленно полученные равенства, то сформируется соотношение:

$$(9) \quad m_1(v_1(t_p))^2 + m_2(v_2(t_p))^2 = m_1(v_1(t_0))^2 + m_2(v_2(t_0))^2$$

С точностью до множителя  $\frac{1}{2}$  равенство (9) является формулировкой закона сохранения кинетической энергии при упругих столкновениях. Таким образом, не задача упругого столкновения решается с использованием закона сохранения кинетической энергии, а сохранение кинетической энергии является побочным результатом решения задачи упругого столкновения при ее реалистичной постановке.

Искусственная конструкция из квадрата скорости тела и его массы, называемая кинетической энергией, не имеет сакрального смысла и является относительной характеристикой. Действительно, понятие скорость тела (точки) определяется только относительно другого тела (точки). Тогда и кинетическая энергия тела зависит от системы отсчета и не является его объективной характеристикой, в отличие, например, от массы.

Кинетической энергии не является и уникальным инвариантом при упругих столкновениях. На основании формул (7), (8) можно построить множество иных инвариантов. Например, можно получить закон сохранения импульса или следующий закон:

$$(10) \quad v_1(t_0) + v_1(t_p) = v_2(t_0) + v_2(t_p)$$

Решением задачи упругого столкновения являются равенства (7), (8), полученные на основании из эмпирических законов. С помощью линейных и нелинейных операций эти равенства можно трансформировать в многочисленные эквивалентные системы уравнений.

Одной из таких искусственных систем является система уравнений для конструкций, называемых импульсом и кинетической энергией. Ожидаемым решением этой системы являются равенства (7), (8). Вместо закона сохранения импульса или закона сохранения кинетической энергии в искусственной системе уравнений можно использовать закон без названия (10), решением будут все те же равенства (7), (8).

### Общий случай столкновения шаров.

Выше была решена одномерная задача, когда скорости шаров в момент столкновения были направлены вдоль линии их центров масс. В общем случае скорости шаров в момент столкновения могут иметь произвольные направления, но решение задачи практически не усложняется. Потребуется лишь выполнить чисто технические операции по разложению векторов скоростей шаров на продольные составляющие в направлении линии центров, и нормальные составляющие к этому направлению, как показано на рис.5:

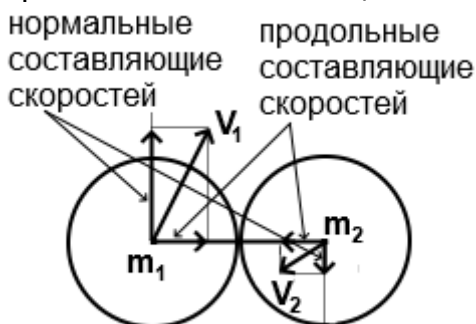


Рис. 5. Общий случай

При столкновении идеальных шаров силы действуют только в направлении линии их центров. Тогда нормальные составляющие скоростей не изменяются, а величины продольных составляющих трансформируются после столкновения, как было показано выше.

Таким образом, пространственная задача вычисления скоростей шаров в процессе столкновения сводится к рассмотренной выше одномерной задаче вычисления изменений скоростей шаров вдоль линии их центров.

### Частично упругие столкновения.

Пусть происходит не идеально упругое столкновение груза с пружиной, и после отталкивания груза пружина остается частично деформированной, например, при резком сжатии сломалась часть ее витков. Скорости груза и основания все равно сравниваются в некий момент времени  $t_D$ , но симметрия, изображенная на рис.4 будет нарушена. Интеграл упругой силы на интервале сжатия  $(t_0, t_D)$ , очевидно, останется прежним, а на интервале разжимания  $(t_D, t_P)$  – уменьшится. Тогда на втором этапе столкновения импульс груза не удваивается, а увеличивается только на часть импульса, полученного на первом этапе столкновения.

Опуская промежуточные простые алгебраические преобразования, выписываем результат частично упругого столкновения:

$$(11) \quad v_1(t_P) = (m_1 v_1(t_0) + m_2 v_2(t_0)) / (m_1 + m_2) + k m_2 (v_2(t_0) - v_1(t_0)) / (m_1 + m_2)$$

$$(12) \quad v_2(t_P) = (m_1 v_1(t_0) + m_2 v_2(t_0)) / (m_1 + m_2) + k m_1 (v_1(t_0) - v_2(t_0)) / (m_1 + m_2)$$

где  $k$  – коэффициент упругости,  $0 \leq k \leq 1$ ,  $k=1$  соответствует абсолютно упругому столкновению,  $k=0$  – абсолютно неупругому.

Первые слагаемые в правых частях равенств (11), (12) совпадают – эти слагаемые определяют скорость груза и основания пружины, когда их скорости сравниваются. Эти слагаемые существуют при любой упругости, даже если пружину заменить на пластилин. Вторые слагаемые определяют дополнительные импульсы при наличии упругости с ненулевым коэффициентом.

Умножив обе части равенства (11) на  $m_1$ , а равенства (12) - на  $m_2$  и сложив полученные уравнения получаем:

$$m_1 v_1(t_P) + m_2 v_2(t_P) = m_1 v_1(t_0) + m_2 v_2(t_0)$$

Таким образом, закон сохранения импульса выполняется не только в любой момент времени, но и при любом коэффициенте упругости. Закон сохранения кинетической энергии выполняется только по завершению только абсолютно упругого столкновения.

### Столкновение вращающихся твердых тел.

Рассмотрим простейшие движущиеся твердые тела – материальные отрезки прямых с равномерно распределенными массами, называемые далее однородными штангами.

Пусть первая штанга движется и совершает столкновение с условно неподвижной второй штангой. Без ограничения общности последующих построений можно считать, что первая штанга движется в плоскости, перпендикулярной второй, как это изображено на рис.6:

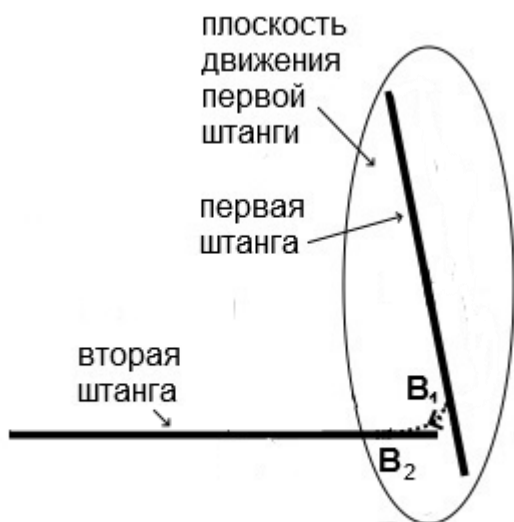


Рис. 6. Столкновение штанг

Штанги сталкиваются малыми областями взаимодействия  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ , которые можно считать материальными точками. Столкновение этих областей подобно рассмотренному выше столкновению шаров.

На рис.7 изображен "момент" столкновения. Система координат выбрана так, что вторая штанга параллельна оси "x", первая штанга параллельна оси "z", скорость точки  $\mathbf{V}_1$  точки  $\mathbf{B}_1$  направлена по оси "y":

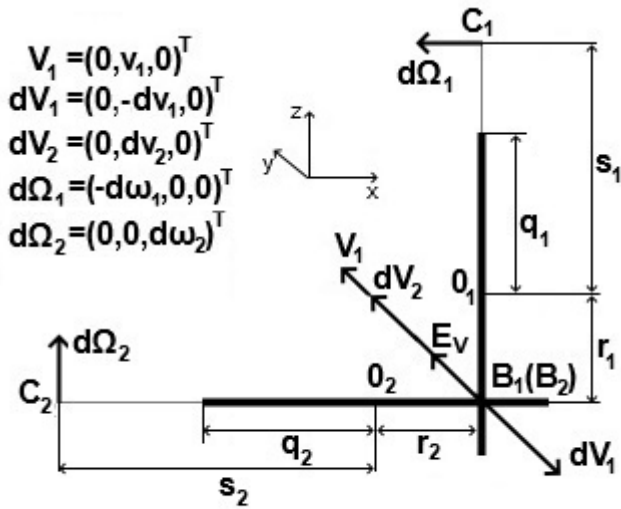


Рис. 7. Приращения скоростей

Столкновения под углами усложнит изображение и добавит чисто технические операции в процессе решения задачи, но метод ее решения сохранится.

В процессе столкновения штанги обмениваются противоположно направленными импульсами. Эти импульсы вызывают приращения моментов импульса штанг, относительно осей, положения которых определяется положением контактирующих точек  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ .

Ось вращения первой штанги будет проходить через точку  $\mathbf{C}_1$ , смещенную вдоль штанги относительно ее центра  $\mathbf{O}_1$  масс в противоположную от точки  $\mathbf{B}_1$  сторону, как это изображено на рис.7.

Если точка столкновения  $\mathbf{B}_1$  смещена относительно центра масс первой штанги длиной  $2q_1$  на расстояние  $r_1$ , то в соответствии с [1] величина  $s_1$  смещения точки  $\mathbf{C}_1$  вычисляется по формуле:

$$(11) \quad s_1 = (r_1^2 + q_1^2) / 2r_1, \quad (r_1 > 0)$$

Аналогичным образом для второй штанги можно записать:

$$(12) \quad s_2 = (r_2^2 + q_2^2) / 2r_2, \quad (r_2 > 0)$$

Процесс столкновения точек  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  можно разбить на два этапа.

Первый этап роста деформации от момента  $t_0$  первого касания до момента  $t_D$  максимальной деформации штанг и установления равенства скоростей точек  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ .

На втором этапе происходит выпрямление штанг силами упругости. Этот этап длится от момента  $t_D$ , соответствующего максимальной деформации, до момента  $t_P$ , когда штанги полностью выпрямляются и разделяются.

Под воздействием силы  $\mathbf{f}$  со стороны первой штанги вторая штанга к моменту  $t_D$  получает импульса  $\mathbf{M}_2(t_D)$ , вычисляемый по формуле:

$$\mathbf{M}_2(t_D) = (s_2 + r_2) \int_{t_0}^{t_D} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

В результате вторая штанга приобретает приращение  $d\Omega_2(t_D)$  угловой скорости величиной  $d\omega_2(t_D)$ , которая определяется из соотношения:

$$(13) \quad (s_2 + r_2) \int_{t_0}^{t_D} \mathbf{f}(\tau) d\tau = \mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2) d\omega_2(t_D),$$

где  $\mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2)$  – момент инерции второй штанги относительно оси вращения, проходящей через точку  $\mathbf{C}_2$ :

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2) = \mathbf{J}_2(\mathbf{O}_2) + m_2 s_2^2,$$

$\mathbf{J}_2(\mathbf{O}_2)$  – момент инерции второй штанги относительно ее центра масс (точка  $\mathbf{O}_2$ ),

$m_2$  – масса второй штанги.

Аналогичные равенства справедливы для первой штанги:

$$(14) \quad (\mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_1) \int_{t_0}^{t_D} \mathbf{f}(\tau) d\tau = \mathbf{J}_1(\mathbf{C}_1) d\boldsymbol{\omega}_1(t_D)$$

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{C}_1) = \mathbf{J}_1(\mathbf{O}_1) + m_1 \mathbf{s}_1^2$$

Соотношения (13), (14) справедливы для абсолютных значений в сил и угловых скоростей. Они позволяют получить соотношение между абсолютными величинами приращений угловых скоростей первой и второй штанг:

$$d\boldsymbol{\omega}_1(t_D)/d\boldsymbol{\omega}_2(t_D) = \mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2) (\mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_1) / (\mathbf{J}_1(\mathbf{C}_1) (\mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_2))$$

Тогда соотношение абсолютных величин приращений  $d\mathbf{v}_1(t_D)$ ,  $d\mathbf{v}_2(t_D)$  линейных скоростей точек  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  имеет вид:

$$(16) \quad d\mathbf{v}_1(t_D)/d\mathbf{v}_2(t_D) = \mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2) (\mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_1)^2 / (\mathbf{J}_1(\mathbf{C}_1) (\mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_2)^2)$$

Равенство (16) определяет соотношение между абсолютными величинами приращений скоростей, но знаки у этих приращений разные. В процессе столкновения величина скорости точки  $\mathbf{B}_1$  непрерывно уменьшается, а величина скорости точки  $\mathbf{B}_2$  непрерывно растет с коэффициентом, определяемым по соотношению (16). До момента  $t_D$  скорость точки  $\mathbf{B}_1$  больше, в момент  $t_D$  линейные скорости указанных точек сравниваются. Равенство скоростей точек  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  в момент  $t_D$  формально записывается следующим образом:

$$(17) \quad \mathbf{v}_1(t_D) - d\mathbf{v}_1(t_D) = d\mathbf{v}_2(t_D)$$

Уравнения (16), (17) являются системой двух линейных уравнений относительно двух неизвестных  $d\mathbf{v}_1(t_D)$ ,  $d\mathbf{v}_2(t_D)$ . Решение этой системы имеет вид:

$$(18) \quad d\mathbf{v}_1(t_D) = \mathbf{v}_1(t_D) \mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2) (\mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_1)^2 / (\mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2) (\mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_1)^2 + \mathbf{J}_1(\mathbf{C}_1) (\mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_2)^2)$$

$$(19) \quad d\mathbf{v}_2(t_D) = \mathbf{v}_1(t_D) \mathbf{J}_1(\mathbf{C}_1) (\mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_2)^2 / (\mathbf{J}_2(\mathbf{C}_2) (\mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_1)^2 + \mathbf{J}_1(\mathbf{C}_1) (\mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_2)^2)$$

В момент  $t_D$  штанги испытывают максимальную степень деформации, и при снятии давления со стороны "надвигающейся" точки  $\mathbf{B}_1$  штанги начинают выпрямляться, отрабатывая накопленную деформацию. Этот процесс происходит симметрично процессу сжатия штанг. Иллюстрация симметричного поведения величины упругой силы  $\mathbf{f}$  представлена на рис.4. Симметрия процессов деформации штанг и их выпрямления приводит к повторным приращениям скоростей точек  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ , равным вычисленным по формулам (18), (19). Таким образом, в момент полной отработки деформаций штанг и их разделения приращения скоростей удваиваются по отношению к моменту  $t_D$ :

$$(20) \quad d\mathbf{v}_1(t_P) = 2d\mathbf{v}_1(t_D)$$

$$(21) \quad d\mathbf{v}_2(t_P) = 2d\mathbf{v}_2(t_D)$$

Соотношения (18)-(21) позволяют вычислить абсолютные величины приращений скоростей точек  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ . При этом приращение  $d\mathbf{V}_1(t_P)$  вектора скорости точки  $\mathbf{B}_1$  направлено, очевидно, противоположно начальной скорости  $\mathbf{V}_1(t_0)$  точки  $\mathbf{B}_1$ :

$$d\mathbf{V}_1(t_P) = -d\mathbf{v}_1(t_P) \mathbf{E}_V,$$

где  $\mathbf{E}_V$  – единичный вектор в направлении вектора  $\mathbf{V}_1(t_0)$ , обозначенного на рис.7, как  $\mathbf{V}_1$ .

Вектор  $d\mathbf{V}_2(t_P)$  приращения скорости точки  $\mathbf{B}_2$  направлен вдоль  $\mathbf{E}_V$ :

$$d\mathbf{V}_2(t_P) = d\mathbf{v}_2(t_P) \mathbf{E}_V$$

Вычисленные приращения векторов скоростей сталкивающихся точек твердых тел при известных осях вращения тел позволяют определить параметры движения всех его точек. Решение этой кинематической задачи известно и здесь не рассматривается.

### Столкновение твердых тел с произвольными формами.

Как показано в [1], воздействие на твердое тело произвольной формы описывается подобно воздействию на неоднородную штангу, являющуюся динамическим аналогом тела в смысле равных масс и характерных моментов инерции.

Поэтому и столкновение тел произвольных форм будут подобны столкновениям их динамических аналогов – неоднородных штанг. Решение задачи столкновения неоднородных штанг отличается от рассмотренного выше решения для однородных штанг только формулами вычисления величин  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$ . Эти формулы выводятся в упомянутой работе для обоих случаев.

Таким образом, задача столкновения условно твердых свободно вращающихся тел также, как и задача столкновения шаров, разрешается средствами эмпирических законов механики без привлечения постулатов об абсолютно твердых телах и присущих им инвариантах.

### **Выводы.**

Предложена модель, позволяющая решать задачи о столкновениях, в том числе, свободно вращающихся условно твердых реальных тел.

В отличии от эвристического приема с использованием законов сохранения эта модель имеет эмпирическое обоснование и позволяет решать более широкий круг задач.

### **Список литературы.**

1. Определение оси вращения свободного твердого тела.

URL: [http://1424.ru/sci/page\\_hard\\_rod.html](http://1424.ru/sci/page_hard_rod.html) (дата обращения: 01.09.2025)